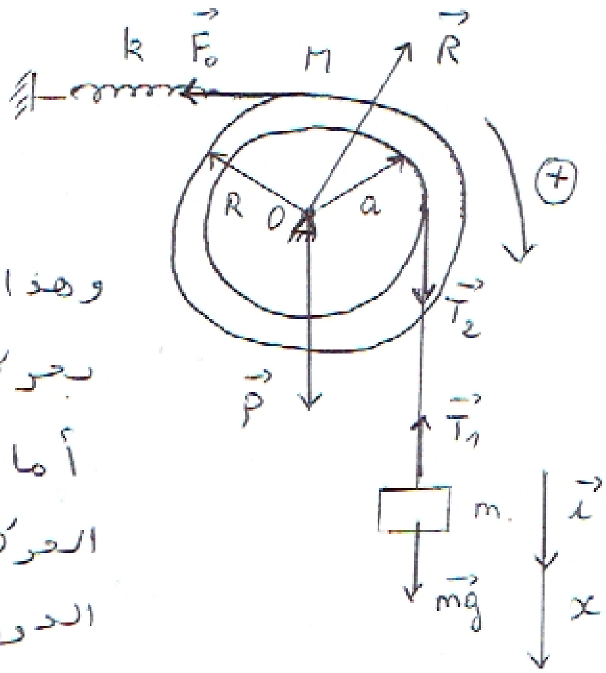
Série n° 1 الاهتزاز الحرّ ذو درجة حرّية واحدة

L'oscillateur libre à 1 degré de liberté

Exercice n° 1 :



△ : هذا الرّمز يعني أنّ القرص مثبّت في حامل (liaison)

وهذا يعني أنّ القرص لا يمكنه القيام بحركة إنسحابية يمين - يسار ولا أمام - خلف ولا أعلى - أسفل.

الحركة الوحيدة الممكنة للقرص هي الدوران حول مركزه "O"

أمّا بالنسبة للكتلة m فإنّ حركتها تكون إنسحابية نحو الأعلى أو نحو الأسفل.

في حالة عدم وجود النابض فإنّ الكتلة m تشدّ على الخيط والخيط يشدّ على القرص فيقوم بتدويره (la masse tire sur le fil) في اتجاه عقارب الساعة

بوجود النابض ، دوران القرص يشوه النابض فيقوم هذا الأخير بممارسة أو تطبيق قوّة إرجاع تمنع الدوران إلى أن تتوازن الجملة.

1) دراسة التوازن : ندرس توازن كلّ جسم على حدى.

ⓐ Le disque : القرص

التوازن هو غياب حركة دورانية أو إنسحابية بالنسبة لمرجع أرضي.

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \quad ; \quad \sum \mathcal{M}_{/\Delta} \vec{F}_{ext} = 0$$

(Δ) هو محور خيالي عمودي على مستوى القرص ويمرّ ب "O"

Bilan des forces —— حصيلة القوى

$\vec{P} + \vec{R} + \vec{F_0} + \vec{T_2} = \vec{0}$

$\mathcal{M}_{/\Delta}\vec{P} + \mathcal{M}_{/\Delta}\vec{R} + \mathcal{M}_{/\Delta}\vec{F_0} + \mathcal{M}_{/\Delta}\vec{T_2} = 0$

$\vec{P} = \vec{mg}$ ثقل القرص

$\vec{R}$: رد فعل الحامل

$\vec{F_0}$: قوة إرجاع النابض عند التوازن

$\vec{T_2}$: توتر الخيط

عزم قوة بالنسبة إلى محور (Δ) هو مقدار جبري موجب إذا أدارت هذه القوة القرص في الإتجاه الموجب ، و يكون سالبا إذا أدارته في الإتجاه السالب.

$$\mathcal{M}_{/\Delta}\vec{F} = \pm \text{ القوة} \times \text{الذراع}$$

الذراع : المسافة بين حامل القوة و مركز الدوران

$\mathcal{M}_{/\Delta}\vec{P} = \mathcal{M}_{/\Delta}\vec{R} = 0$ لأن حاملي هاتين القوتين يمرّان بمركز الدوران "O"

$\Rightarrow -F_0 . R + T_2 . a = 0 \Rightarrow -k x_0 R + T_2 . a = 0$ ①

حيث x_0 مقدار تشوه النابض عند التوازن.

ⓑ La masse m الكتلة

كل القوى المطبقة على الكتلة لها نفس الحامل إذن لا يمكنها الدوران فحركتها إنسحابية. شرط التوازن يكتب على الشكل

$\Sigma \vec{F}_{ext} = \vec{mg} + \vec{T_1} = \vec{0}$

بالإسقاط على المحور (Ox) :

$mg - T_1 = 0$ ②

يمكن أن نبرهن أنه إذا كانت كتلة الخيط مهملة أمام كتلة الجسم المعلّق m فإن $T_1 = T_2$

بالتعويض في المعادلة ①

$\Rightarrow T_1 = mg$

نجد :

$-k x_0 R + mga = 0 \Rightarrow mga = kRx_0$

إذن عند توازن النظام يكون النابض ممددا بمقدار

$$\boxed{x_0 = \frac{mga}{k.R}}$$

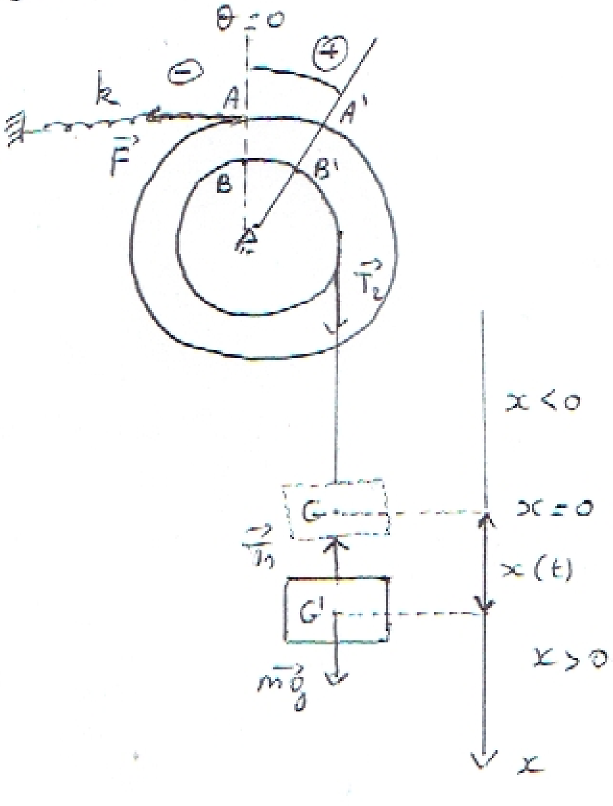
ج) الدراسة الديناميكية: إذا أزيحت الجملة عن التوازن لسبب ما وتركت لحالها (هزاز حر)، ندرس إستجابة النظام (La réponse du système). نفترض أن إنزياح الجملة حدث نحو الأسفل، هنا تزيد إستطالة النابض والعلاقة

$$mga = kRx_0$$

تصبح غير صحيحة لأن في هذه الحالة عزم قوة إرجاع النابض يكون أكبر في الإتجاه السالب فيدور القرص في اتجاه عكس عقارب الساعة، حينئذ ينقص التشوه فيصبح عزم توتر الخيط أكبر فيدير القرص في الإتجاه الموجب فتنشأ الإهتزازات.

نسمي الإنتقال الزاوي للقرص $\theta(t)$: مقدار ابتعاد القرص عن ح
" الخطي للكتلة $x(t)$: " " الكتلة عن ح

لزاوية دوران موجبة، مطال الكتلة $x(t)$ موجب والعكس صحيح لأن القرص يدور يمين يسار وضعية التوازن $(\theta=0)$، إذن الكتلة تنتقل نحو الأسفل $(x>0)$ ثم نحو الأعلى $x<0$ مرورًا بموضع التوازن $x=0$



نلاحظ أنه من أجل دوران القرص بزاوية θ تنتقل النقطة B على قوس دائرة $\overset{\frown}{BB'} = a\,\theta$ وهو نفس المقدار الذي تنزاح به الكتلة m عن التوازن نحو الأسفل ومنه

$$\boxed{x(t) = a\,\theta(t)}$$

إيجاد المعادلة الزمنية $\theta(t)$ أو $x(t)$ نفس الشيء لأن معرفة الأول يسمح بمعرفة الثاني والعكس صحيح لذا نقول عن الجملة بأنها ذات درجة حرية واحدة نختار كإحداثية معممة (coordonnée généralisée)

$$q(t) = \theta(t).$$

بتطبيق المبدأ الأساسي للتحريك للحركة الدورانية ثم الإنسحابية.

ⓐ <u>Disque</u> <u>القرص</u>

$$\mathcal{M}_{/\Delta}\vec{P} + \mathcal{M}_{/\Delta}\vec{R} + \mathcal{M}_{/\Delta}\vec{F} + \mathcal{M}_{/\Delta}\vec{T_2} = J_{\Delta}\cdot\ddot{\theta} \qquad (1)$$

$J_{/\Delta}$: يسمى عزم عطالة القرص (Moment d'inertie) و يعبّر عن مقاومة القرص على الدوران:

عبارته تعطى بالعلاقة $\boxed{J_{/\Delta} = \frac{1}{2} M R^2}$

في حالة دوران القرص حول مركز تناظره

وحدته في جملة الوحدات الدولية

SMKA : S.I $[J_{/\Delta}] = Kg\cdot m^2$

✱ $\overset{\frown}{AA'}$: مقدار تشوه النابض عند دوران القرص

$$\boxed{\overset{\frown}{AA'} = R\cdot\theta}$$

$\ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$: التسارع الزاوي Accélération angulaire.

$① \Rightarrow -kR(x_0 + R\theta) + T_2 \cdot a = J_{/\Delta} \cdot \ddot{\theta}$

$\Rightarrow -kRx_0 - kR^2\theta + T_2 \cdot a = J_{/\Delta}\ddot{\theta}$ (1')

(b) la masse. الكتلة $\overrightarrow{GG'}$: شعاع الموضع

$\overrightarrow{GG'} = x\vec{i} \Rightarrow \vec{V} = \dot{x}\vec{i} \Rightarrow \vec{\gamma} = \ddot{x}\vec{i}.$

$\Sigma \vec{F}_{ext} = m\vec{\gamma} \Rightarrow \vec{P} + \vec{T_1} = m\vec{\gamma}$

$\Rightarrow mg - T_1 = m\ddot{x}$ avec $\ddot{x} = a\ddot{\theta}$

$\Rightarrow mg - T_1 = ma\ddot{\theta} \Rightarrow T_1 = mg - ma\ddot{\theta}$

بما أن $T_1 = T_2$ بالتعويض في (1')

$$-kRx_0 - kR^2\theta + mga - ma^2\ddot{\theta} = J_{/\Delta}\ddot{\theta}$$

من شرط التوازن : $mga - kRx_0 = 0$

$$\Rightarrow (J_{/\Delta} + ma^2)\ddot{\theta} + kR^2\theta = 0.$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{k \cdot R^2}{J_{/\Delta} + ma^2} \cdot \theta = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{k \cdot R^2}{\frac{1}{2}MR^2 + ma^2} \cdot \theta = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{2kR^2}{MR^2 + ma^2} \cdot \theta = 0.$$

بكل هذه المعطيات مقدار ابتعاد الفرص عن وضعية توازنه يحقق معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية وهي معادلة هزاز توافقي نبضه الذاتي ω_0 هو

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2kR^2}{MR^2 + ma^2}}$$

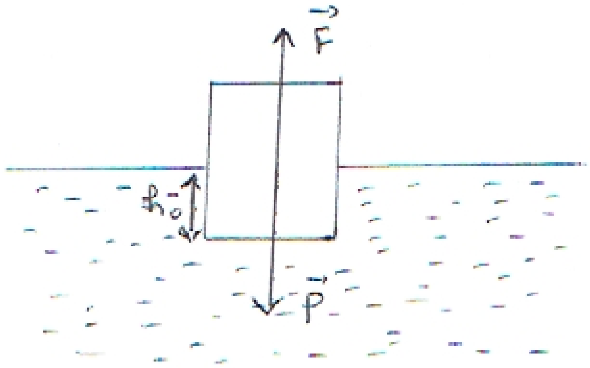
ودوره $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{MR^2 + ma^2}{2kR^2}}$

المعادلة الزمنية تعطى بالعبارة $\theta(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$

A, φ تحدد عن طريق الشروط الابتدائية.

المطال الابتدائي θ_0 والسرعة الزاوية الابتدائية $\dot{\theta}_0$

Exercice n°= 1 : { الجملة المدروسة: الكتلة



معطيات التمرين

m : كتلة الجسم الذي يطفو على سطح السائل.

S : سطح الجسم

ρ : الكتلة الحجمية للسائل

عندما يطفو الجسم الصلب (le corps flotte) هذا يعني أن هناك توازن بين ثقله و دافعة أرخميدس

نسمي h_0 : الإرتفاع المغمور بالسائل.

دافعة أرخميدس (Poussée d'Archimède) تقدر بثقل الماء المزاح.

مقدار السائل المزاح هو حجم الجسم المغمور إذن

$$V = h_0 . S$$

إذن دافعة أرخميدس $\|\vec{F}\|$ تعطى ب :

$$\|\vec{F}\| = \rho . V . g = \rho . h_0 S . g .$$

عند التوازن :

$$\vec{P} + \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow P - F = 0$$

$$\Rightarrow mg - \rho h_0 S . g = 0$$

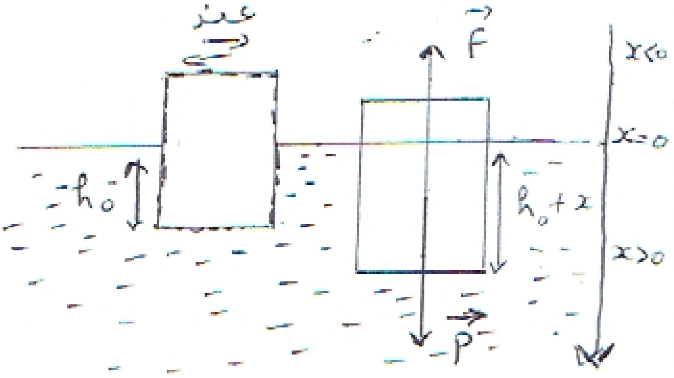
إذن عند التوازن إرتفاع الجزء المغمور في السائل معطى بالعلاقة :

$$h_0 = \frac{m}{\rho . S}$$

الدراسة الديناميكية : لو أزيح الجسم نحو الأسفل وترك لحاله، هنا دافعة أرخميدس تكون أكبر من الثقل، فيتحرك الجسم نحو الأعلى، هنا يحدث العكس، تكون الثقل أكبر من F

فينغمر بالسائل مرّة أخرى أي هناك قوّتين للإرجاع مرّة ثقلية و مرّة أخرى قوى ناتجة عن ضغط الماء (دافعة أرخميدس) فيقوم هذا الجسم بالإهتزاز

نسمّي $x(t)$ مقدار إبتعاد الجسم عن وضعية التوازن.



$x(t)$: الإنتقال الخطي

$\dot x(t)$ السرعة الخطية

$\ddot x(t)$ التسارع الخطي

$x=0$ وضعية التوازن.

نفرض أنّ السائل مثالي (لزوجته منعدمة) يمكن إهمال قوى إحتكاك اللزوجة $(\vec f = -\alpha \vec v)$

إذن القوى المؤثرة عليه هي $\vec F$ و $\vec P$ (حالة مثالية).

$$\vec P + \vec F = m\vec \gamma \Rightarrow P - F = m\ddot x$$

في هذه الحالة تكون $F = S(h_0+x)\cdot\rho\cdot g$

$$\Rightarrow \underbrace{mg - Sh_0\rho g}_{0} - Sx\rho g = m\ddot x \quad (1)$$

من دراسة التوازن.

$$(1) \Rightarrow m\ddot x + S\rho g x = 0 \Rightarrow \boxed{\ddot x + \frac{S\rho g}{m}\cdot x = 0}$$

وهي معادلة هزاز توافقي نبضه الذاتي :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{S\rho g}{m}}$$

و دوره الذاتي T_0 :

$$\boxed{T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{S\rho\cdot g}}} \qquad \boxed{x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)}$$

$A, \varphi \Rightarrow$ الشروط الإبتدائية $x(t=0) = x_0$ ، $\dot x(t=0) = \dot x_0$

Exercice n°5: النظام عبارة عن قضيب كتلته m

عزم عطالته بالنسبة لمركز التناظر (منتصف القضيب) هو

$J_{/o}$. القضيب مثبت أفقيا في حامل عن طريق

سلك معدني قابل للفتل (Torsion)

الجملة المدروسة {القضيب}.

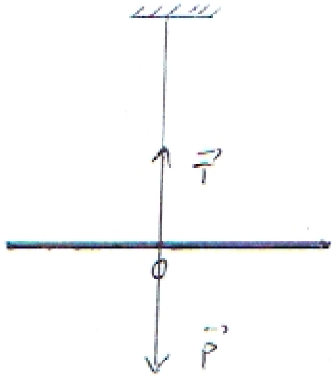
عند التوازن : $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$

$\vec{P}$: ثقل القضيب

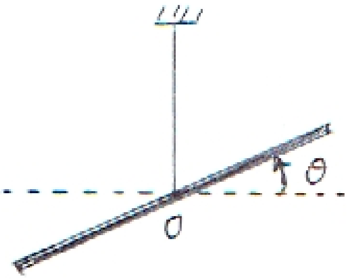
$\vec{T}$: توتر السلك.

$$\vec{P} + \vec{T} = \vec{0} \Rightarrow P = T$$

$$mg = T$$



لو أدرنا القضيب بزاوية θ فإن السلك ينفتل (le fil se tord) فيمارس عزم ارجاع $M_{rappel} = -C\theta$.



فيدور القضيب في الاتجاه الآخر و يتعدى وضع التوازن ($\theta = 0$) بطاقته الحركية (طاقته الكامنة الفتلية حوّلها إلى طاقة حركية) ، فينفتل السلك في الاتجاه الآخر وهكذا.

نعتبر الإحداثية المعممة $q(t) \equiv \theta(t)$

هذا نظام حر غير مخمد. معادلة Lagrange التي توصلنا إلى المعادلة الزمنية $\theta(t)$ نكتب في هذه الحالة على الشكل

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

$$L = T - V$$

L: Lagrange دالة

T : الطاقة الحركية للنظام

V : الطاقة الكامنة للنظام

ملاحظة: لمّا ينفتل السلك المعدني، يخزّن طاقة كامنة فتلية عبارتها $E_p = \frac{1}{2} C \theta^2$

θ : زاوية الدوران.

C : ثابت الفتل وهو من الخصائص التقنية للسلك قيمته تتعلّق بطبيعة المعدن، طول السلك وقطر مقطع السلك.

نقوم بحساب دالة Lagrange.

$$L = T - V.$$

$$T = \frac{1}{2} J_{/0} \dot{\theta}^2 \Longrightarrow$$ هذه عبارة الطاقة الحركية الدورانية للقضيب.

$$V = \frac{1}{2} C\theta^2$$ هنا، لا وجود للطاقة الكامنة الثقلية لأنّ القضيب يبقى أفقيا. كلّ الطاقة الكامنة فتلية.

$$L = \frac{1}{2} J_{/0} \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} C\theta^2.$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{d}{dt}\left(J_{/0}\dot{\theta}\right) = J_{/0}\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -C\theta$$

بالتعويض في معادلة Lagrange

$$J_{/0}\ddot{\theta} + C\theta = 0 \Longrightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{C}{J_{/0}}\theta = 0.}$$

النبض الذاتي للحركة هو $\omega_0 = \sqrt{\frac{C}{J_{/0}}}$

$$J_{/0} = \frac{Ml^2}{12} \longrightarrow$$ عبارة عزم عطالة قضيب يدور حول منتصفه (مركزه).

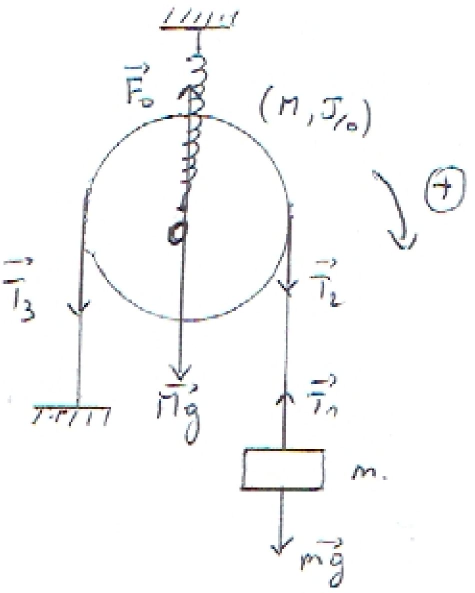
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{12C}{Ml^2}} \Longrightarrow \boxed{T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{M.l^2}{12.C}}}$$

Exercice n°= 5: تتكون الجملة من

$$\begin{cases} ① \quad m \text{ كتلة} \\ ② \quad \text{قرص كتلته } M \end{cases}$$

وعزم عطالته

بالنسبة للنقطة O $J_{/o}$



لولا وجود النابض يسقط القرص تحت تأثير ثقله ويدور تحت تأثير توتر الخيط ثمّا يسقط الجسم m إلى أن ينفصل.

هنا، النابض له دور في تحقيق توازن معيّن. حتى يمنع سقوط القرص يجب أن يمارس قوة نحو الأعلى إذن يجب أن يكون ممدّدا.

دراسة التوازن:

ⓐ توازن القرص

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \Rightarrow \vec{T_3} + \vec{T_2} + M\vec{g} + \vec{F_o} = \vec{0} \quad ①$$

$$\sum \mathcal{M}_{/\Delta} \vec{F}_{ext} = 0 \Rightarrow \mathcal{M}_{/\Delta}\vec{T_3} + \mathcal{M}_{/\Delta}\vec{T_2} + \underbrace{\mathcal{M}_{/\Delta}M\vec{g}}_{0} + \underbrace{\mathcal{M}_{/\Delta}\vec{F_o}}_{0} = 0 \quad ②$$

(Δ) مستقيم خيالي عمودي على مستوي القرص ويمرّ ب 'O'

$$① \Rightarrow Mg + T_3 + T_2 - F_o = 0. \quad (1')$$

$$② \Rightarrow T_2 . R - T_3 . R = 0 \Rightarrow T_2 = T_3.$$

ⓑ توازن الكتلة m $\quad \sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \Rightarrow m\vec{g} + \vec{T_1} = \vec{0} \Rightarrow T_1 = mg.$

بما أن الخيط مهمل الكتلة فإن $T_1 = T_2 = T_3$

بالتعويض في المعادلة (1'):

$$Mg + 2T_1 - F_o = 0 \Rightarrow Mg + 2mg - F_o = 0$$

$$Mg + 2mg - kx_0 = 0$$

عند التوازن يكون النابض ممدّد بمقدار :

$$\boxed{x_0 = \frac{Mg + 2mg}{k} = \frac{(M+2m)g}{k}}$$

<u>الدراسة الديناميكية :</u> لو أزحنا القرص عن وضع التوازن نحو الأسفل بمقدار معيّن ، يزيد تشوه النابض فتكون القوة $\vec{F}$ يعني قوة إرجاع النابض أكبر من $(Mg + 2mg)$ فيصعد نحو الأعلى ، في هذه الحالة ، مقدار تشوه النابض ينقص فتصبح $(Mg + 2mg)$ أكبر من $\|\vec{F_0}\|$ فينزل القرص. علما أنه خاضع للتوترين ، فالقرص تكون لديه حركة مزدوجة إنسحاب + دوران حول مركزه .

لكل إنسحاب بمقدار x للقرص يقابله دوران بزاوية θ حيث $\boxed{x = R\theta}$

أمّا حركة الكتلة فإن إنتقالها نحو الأسفل ناتج عن سببين : هبوط القرص بمقدار x و دورانه بمقدار $R\theta$

ليكن $y(t)$ مقدار إبتعاد الكتلة عن وضع التوازن فإن

$$y(t) = x(t) + R\theta(t) = 2R\theta(t).$$

x, y, θ مرتبطين ، غير مستقلين إذن الجملة ذات درجة حرية واحدة : إمّا x إمّا y إمّا θ

نختار الإحداثية المعمّمة $q(t) = \theta(t)$

هذا نظام حرّ غير مخمّد ذو درجة حرية واحدة .

معادلة Lagrange نكتب على الشكل التالي :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0.$$

$L = E_c - E_p.$

E_c : الطاقة الحركية للنظام (قرص + كتلة)

E_p الكامنة " " (قرص + كتلة)

<u>حساب الطاقة الحركية :</u>

$$E_c = \underbrace{\frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}J_{/0}\dot{\theta}^2}_{\text{القرص}} + \underbrace{\frac{1}{2}m\dot{y}^2}_{\text{كتلة}}$$

$$\begin{cases} E_{c\,\text{انسحاب قرص}} = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 & E_{c\,\text{انسحاب كتلة}} = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 \\ E_{c\,\text{دوران قرص}} = \frac{1}{2}J_{/0}\dot{\theta}^2 & \end{cases}$$

<u>بما أن</u> :

$x = R\theta \Rightarrow \dot{x} = R\dot{\theta}$

$y = 2R\theta \Rightarrow \dot{y} = 2R\dot{\theta}$

$$E_c = \frac{1}{2}MR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}J_{/0}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\left(4R^2\dot{\theta}^2\right)$$

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2}MR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}J_{/0}\dot{\theta}^2 + 2mR^2\dot{\theta}^2}$$

<u>حساب الطاقة الكامنة للجملة :</u>

$$E_p = \underbrace{\text{طاقة كامنة ثقلية}}_{E_{pp}} + \underbrace{\text{طاقة كامنة مرونية}}_{E_{p_{el}}}$$

$$E_{p_{el}} = \frac{1}{2}k\left(x_0 + x\right)^2 = \frac{1}{2}k\left(x_0 + R\theta\right)^2.$$

عبارة الطاقة الكامنة الثقلية بالنسبة لذي جسم

هي $E_p = mgh$ m : كتلة الجسم

h : المسافة بين مركز ثقل

الجسم ومستوى مرجعي.

بالنسبة للفرص نأخذ المستوي المرجعي وضع التوازن

$$\Rightarrow \quad E_{pp} = -Mgx = -MgR\theta$$

نفس الشي بالنسبة للكتلة m :

$$\Rightarrow \quad E_{pp} = -mgy = -2mgR\theta.$$

إذن الطاقة الكامنة الكلية هي:

$$E_p = -MgR\theta - 2mgR\theta + \frac{1}{2}k(x_0 + R\theta)^2.$$

$$L = \frac{1}{2}MR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}J_{/0}\dot{\theta}^2 + 2mR^2\dot{\theta}^2 + MgR\theta + 2mgR\theta - \frac{1}{2}k(x_0 + R\theta)^2.$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = MR^2\ddot{\theta} + J_{/0}\ddot{\theta} + 4mR^2\ddot{\theta} = (MR^2 + J_{/0} + 4mR^2)\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = MgR + 2mgR - kR(x_0 + R\theta).$$

بالتعويض في معادلة Lagrange

$$(MR^2 + J_{/0} + 4mR^2)\ddot{\theta} - MgR - 2mgR + kRx_0 + kR^2\theta = 0.$$

من شرط التوازن

$$kRx_0 - MgR - 2mgR = 0$$

إذن:

$$(MR^2 + J_{/0} + 4mR^2)\ddot{\theta} + kR^2\theta = 0.$$

$$J_{/0} = \frac{1}{2}MR^2 \Rightarrow \left(\frac{3}{2}MR^2 + 4mR^2\right)\ddot{\theta} + kR^2\theta = 0.$$

$$\ddot{\theta} + \frac{k R^2}{\frac{3}{2} M R^2 + 4 m R^2} \cdot \theta = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{2k}{3M + 8m} \cdot \theta = 0.$$

وهي معادلة هزاز توافقي نبضه الذاتي ω_0 :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{3M + 8m}}$$

ودوره الذاتي T_0 $\quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{3M + 8m}{2k}}.$$

الحل من الشكل : $\theta(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$

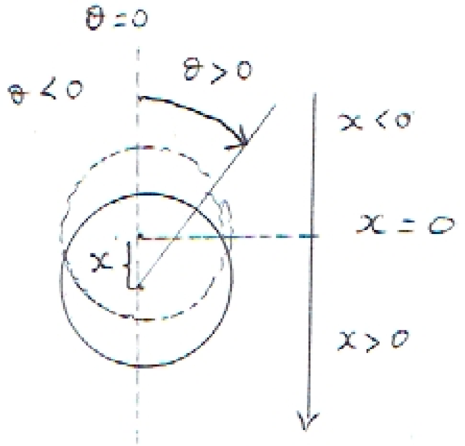
معرفة المعادلة الزمنية $\theta(t)$ تسمح لنا بمعرفة

مقدار انسحاب القرص $x(t) = R \cdot \theta(t)$

وتسمح لنا بمعرفة المعادلة الزمنية لحركة

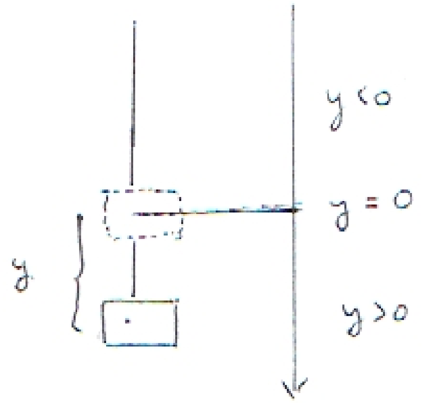
الكتلة m : $y(t) = 2R\,\theta(t).$

جميع المقادير محسوبة جبريا من موضع التوازن.



حركة القرص

انسحاب + دوران.



حركة الكتلة

انسحاب